Konstruktionen mit abstrakten VR

$(V_i, +, \cdot)$ K-VR

4.18 Def & Satz:
Das Produkt/die Summe von $(V_1, +, \cdot)$ und $(V_2, +, \cdot)$ ist die Menge $V_1 \times V_2$ mit komponentenweiser Addition & Skalarmultiplikation:

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + (\underline{v}_1', \underline{v}_2') := (\underline{v}_1 + \underline{v}_1', \underline{v}_2 + \underline{v}_2')$$
$$s \cdot (\underline{v}_1, \underline{v}_2) := (s \cdot \underline{v}_1, s \cdot \underline{v}_2)$$
(für $s \in K$)

Das ist ein K-VR, geschrieben als $V_1 \times V_2$ oder $V_1 \oplus V_2$.

Beispiel:
$$\mathbb{R}^n \cong \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{n}$$
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$$

4.19 Def. & Satz.

Das **Produkt** $\prod_{i \in I} V_i$ einer Familie von VR ist die Menge $\prod_{i \in I} V_i$, ausgestattet mit komponentenweiser Addition + Skalarmultiplikation.

Die **Summe** $\bigoplus_{i \in I} V_i$ ist der UVR

$$\left\{ (\underline{v}_i)_{i \in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{v}_i = \underline{0} \text{ für alle} \\ \text{außer endlich} \\ \text{viele Indizes } i \end{array} \right\} \subseteq \prod_{i \in I} V_i$$

Offenbar gilt für endliche Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$:

$$\prod_{i \in I} V_i = V_1 \times \dots \times V_n = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}[X] \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{R}$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i X^i \leftarrow (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

endliche Summe, also Polynom

beliebige Menge

(b) $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}) \cong \prod_{i\in I} \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \longmapsto a_i \end{pmatrix} \leftarrow (a_i)_{i\in I}$$

$$\begin{pmatrix} f: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \longmapsto f(i) \end{pmatrix} \longmapsto (f(i))_{i\in I}$$

4.20 Notiz: Die Projektionen

$$\pi_j: \prod_{i\in I} V_i \longrightarrow V_j$$

$$\bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow V_j$$

$$(v_i)_i \longmapsto v_j$$

und die Inklusionen

$$\iota_j: V_j \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i$$

$$V_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$$

$$\underline{v} \longmapsto (v_i)_{i\in I} \text{ mit } v_i = \begin{cases} \underline{v} & i=j \\ \underline{0} & i\neq j \end{cases}$$

sind linear.

4.21 Def: V VR, $E_1, \ldots, E_\ell \subseteq V$ UVR

V zerfällt in $E_1, \ldots, E_\ell$, falls die kanonische Abb.

$$\bigoplus_{i=1}^{\ell} E_i \xrightarrow{(*)} V$$
$$(v_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} v_i$$

ein Isomorphismus ist.

Kurznotation: $\bigoplus_{i=1}^{\ell} E_i = V$

4.22 Notiz: $\bigoplus_{i=1}^{\ell} E_i = V$

$\Longleftrightarrow$ (siehe Def. 4.10 $\sum_{i=1}^{\ell} E_i = V$ (* surjektiv)

und für $v_1 \in E_1, \ldots, v_\ell \in E_\ell$ gilt:
$\sum_{i=1}^{\ell} v_i = 0 \Longrightarrow v_1 = \ldots = v_\ell = 0$
(* injektiv))

Beispiel:

$\mathbb{R}^2$ zerfällt in x-Achse und y-Achse

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$

Quotientenvektorräume

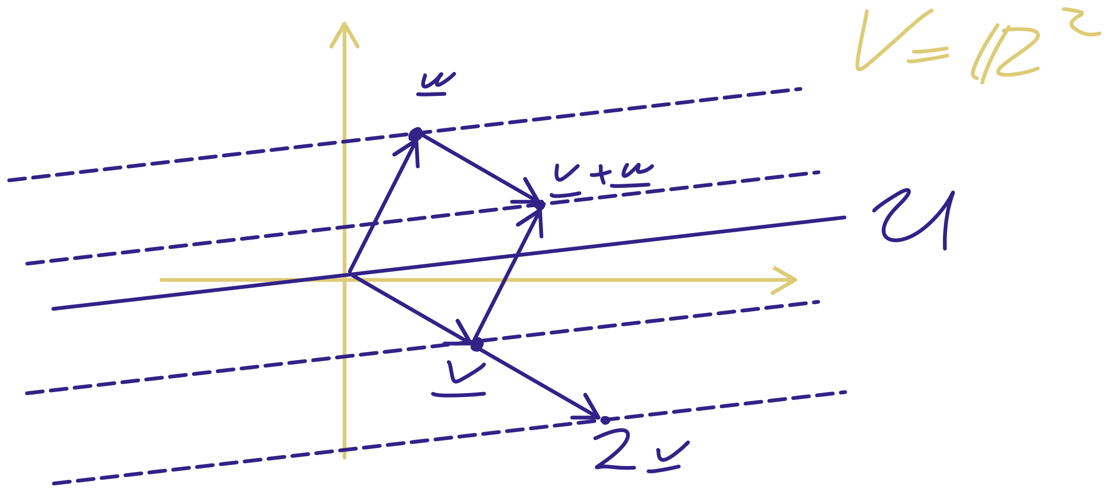
4.23 Def & Satz: Ist $\mathcal{U} \leq V$ ein UVR, so ist die Quotientengruppe $V/\mathcal{U}$ wieder ein VR bezüglich der Skalarmultipl.

$$s \cdot [\underline{v}] := [s \cdot \underline{v}] \qquad (s \in K)$$

und die kanonische Projektion

$$V \longrightarrow V/\mathcal{U}$$

ist linear. Wir nennen $V/\mathcal{U}$ **Quotientenvektorraum.**



gestrichelte Linie durch $\underline{v}$
$= \underline{v} + \mathcal{U}$

4.24 Notiz Für $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ gilt:

$$[\underline{v}] = [\underline{v}'] \text{ in } V/\mathcal{U} \iff \underline{v} + \mathcal{U} = \underline{v}' + \mathcal{U}$$
$$\iff \underline{v} - \underline{v}' \in \mathcal{U}$$

(additive Schreibweise von Satz 2.18)

Beweis zu 4.23:

Skalarm. wohldefiniert:

Sei $[\underline{v}] = [\underline{v}']$. Dann ist

$$\underline{v} - \underline{v}' \in U \quad (4.24)$$

$$s \cdot (\underline{v} - \underline{v}') \in U \quad (\text{da } U \text{ UVR})$$

$$\overset{\|}{s \cdot \underline{v} - s \cdot \underline{v}'}$$

, also ist

$$[s \cdot \underline{v}] = [s \cdot \underline{v}'] \quad (\text{nach } 4.24).$$

Axiome V1 – V4 folgen direkt aus Axiomen für V. $\square$

4.25 Isomorphiesatz

Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ lässt sich faktorisieren als

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "q"'] & & W \\
V/\ker(f) \arrow[r, "\overline{f}", "\cong"'] & \operatorname{im}(f) \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$[\underline{v}] \longmapsto f(\underline{v}),$$

wobei q kanonische Projektion, i kanonische Inklusion ist.

Alle Abb. sind linear und $\overline{f}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Zu prüfen ist (nach 2.25) nur noch:

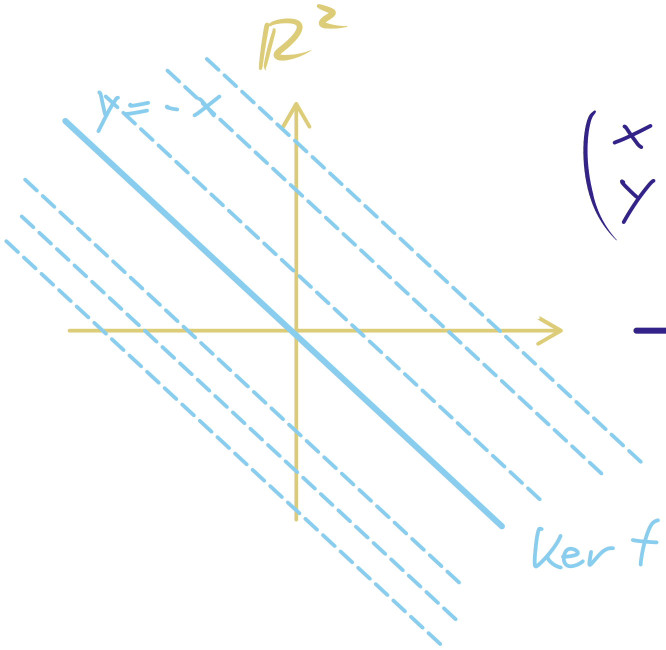
$$\forall s \in K: \overline{f}(s \cdot [\underline{v}]) = s \cdot \overline{f}([\underline{v}])$$

$$\overline{f}(s \cdot [\underline{v}]) \underset{\text{Def. 4.23}}{=} \overline{f}([s \cdot \underline{v}]) \underset{\text{Def. von } \overline{f}}{=} f(s \cdot \underline{v}) = \ldots$$

$$\ldots \underset{f \text{ linear}}{=} s \cdot f(\underline{v}) \underset{\text{Def. von } \overline{f}}{=} s \cdot \overline{f}([\underline{v}])$$

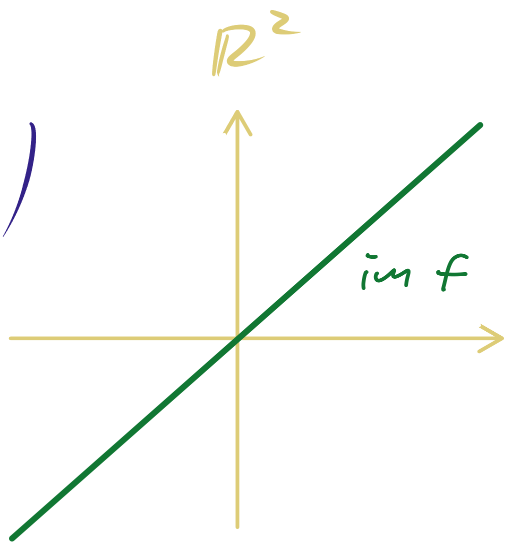
$\square$

Beispiel:



$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & \mathbb{R}^2 \\
& \mathbb{R}^2/\ker f \cong \mathrm{im}\, f \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$



(In diesem Bsp. ist $\mathrm{im}\, f \underset{\binom{x}{y} \mapsto x}{\cong} \mathbb{R}$)